Proceedings of IAM, V.1, N.1, 2012, pp.36-62

ВЫПУКЛАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

М.А. Садыгов

Институт Прикладной Математики БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: misraddin08@rambler.ru

Резюме. В работе рассмотрены задачи минимума для экстремальных задач трехмерных дифференциальных включений. Экстремальные задачи для многомерных дифференциальных включений изучены автором в работах [1-5] и получены необходимые условия первого и второго порядков. В [5] и [7] рассмотрены задачи минимума для экстремальных задач трехмерных дифференциальных включений. Здесь изучаются вариационные задачи, к которым приводится экстремальные задачи для трехмерных дифференциальных включений. Далее рассматриваются выпуклые экстремальные задачи для трехмерных дифференциальных включений, получены необходимые и достаточные условия экстремума первого порядка.

Ключевые слова: экстремальные задачи, дифференциальные включения, необходимые и достаточные условия.

AMS Subject Classification: 05C35, 52A20

1. О минимизации трехмерных вариационных задач

Пусть
$f:[0,a]\times[0,b]\times[0,c]\times R^{2(k_1+k_2+k_3)}\to \overline{R}=R\cup\{+\infty\}$,
$\varphi_1:[0,b]\times[0,c]\times R^{2k_1}\to\overline{R}$, $\varphi_2:[0,a]\times[0,c]\times R^{2k_2}\to\overline{R}$,
$\varphi_3:[0,a]\times[0,b]\times R^{2k_2}\to\overline{R}$ -нормальные интегранты, где k_1,k_2,k_3, натуральные числа, $1\le p<+\infty$, $a>0,\ b>0$ и $c>0$. Положим $D=[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$, $V_x^p=\{u\in L_p^{k_1}(D):u_x\in L_p^{k_1}(D)\}$,
$V_y^p=\{\upsilon\in L_p^{k_2}(D):\upsilon_y\in L_p^{k_2}(D)\}$, $V_z^p=\{w\in L_p^{k_3}(D):w_z\in L_p^{k_3}(D)\}$.

Рассмотрим пространство $V^p=V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ с нормой

$$\|(u,\upsilon,w)\|_{V^p}=\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1|u(x,y,z)|^p\,dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1|u_x(x,y,z)|^p\,dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1|\upsilon(x,y,z)|^p\,dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\upsilon_y(x,y,z)\right|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|w(x,y,z)\right|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|w_z(x,y,z)\right|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Если $(u,\upsilon,w)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$, то обозначим

$$U(x,y,z)=(u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)),$$

$$\nabla U(x,y,z)=(u_x(x,y,z),\upsilon_y(x,y,z),w_z(x,y,z)).$$

Положим

$$U_i(x,y,z)=(u_i(x,y,z),\upsilon_i(x,y,z),w_i(x,y,z)),$$

$$U_i^*(x,y,z)=(u_i^*(x,y,z),\upsilon_i^*(x,y,z),w_i^*(x,y,z)),$$

$$\nabla\overline{U}_i^*(x,y,z)=(\overline{u}_{i_x}^*(x,y,z),\overline{\upsilon}_{i_y}^*(x,y,z),\overline{w}_{i_z}^*(x,y,z)).$$

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями или отображениями понимается, как почти всюду.

Рассмотрим минимизации функционала

$$\begin{aligned} J_p(u,\upsilon,w) &= \int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z,U(x,y,z),\nabla U(x,y,z))dxdydz + \\ &+\int_0^b\int_0^c \varphi_1(y,z,u(0,y,z),u(a,y,z))dydz + \\ &+\int_0^a\int_0^c \varphi_2(x,z,\upsilon(x,0,z),\upsilon(x,b,z))dxdz + \\ &+\int_0^a\int_0^b \varphi_3(x,y,w(x,y,0),w(x,y,c))dxdy \end{aligned} \tag{1}$$

на пространстве $V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$.

Будем говорить, что функция $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{\mathrm{w}})\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ являлась точкой минимума функционала $J_p(u,\upsilon,\mathrm{w})$ на пространстве $V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$, если $\left|J_p(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{\mathrm{w}})\right|<+\infty$ и справедливо неравенство $J_p(u,\upsilon,\mathrm{w})\ge J_p(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{\mathrm{w}})$ при $(u,\upsilon,\mathrm{w})\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$.

Легко проверяется $V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ с нормой

$$\left\|(u,\upsilon,w)\right\|_{V^p}=\left\|u\right\|_{V_x^p}+\left\|\upsilon\right\|_{V_y^p}+\left\|w\right\|_{V_z^p}$$

является банаховым пространством и любой линейный непрерывный функционал $V^*(u,\upsilon,w)$ на $V_x^p \times V_y^p \times V_z^p$ можно представить в виде

$$V^*(u,\upsilon,w) = \int_0^a\int_0^b\int_0^c (U(x,y,z)\,|\,U_1^*(x,y,z))dxdydz +$$

$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^c (\nabla U(x,y,z)\,|\,U_2^*(x,y,z))dxdydz,$$

где $u_1^*, u_2^* \in L_q^{k_1}(D)$, $\upsilon_1^*, \upsilon_2^* \in L_q^{k_2}(D)$, $w_1^*, w_2^* \in L_q^{k_3}(D)$, $pq = p + q$. Функционал V^* в дальнейшем обозначается символом $(u_1^*, \upsilon_1^*, w_1^*, u_2^*, \upsilon_2^*, w_2^*)$.

Положив

$$J_p^*(V^*) = \sup_{(u,v,w)\in V_x^p \times V_y^p \times V_z^p} \{V^*(u,\upsilon,w) - J_p(u,\upsilon,w)\}$$

определим сопряженный функционал на $(V_x^p)^* \times (V_y^p)^* \times (V_z^p)^*$.

Лемма 1. Если $u_1^*, u_2^* \in L_q^{k_1}(D)$, $\upsilon_1^*, \upsilon_2^* \in L_q^{k_2}(D)$, $w_1^*, w_2^* \in L_q^{k_3}(D)$, $u_3^*, u_4^* \in L_q^{k_1}([0,b]\times[0,c])$, $\upsilon_3^*, \upsilon_4^* \in L_q^{k_2}([0,a]\times[0,c])$, $w_3^*, w_4^* \in L_q^{k_3}([0,a]\times[0,b])$, то неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{(u,v,w)\in V_x^p \times V_y^p \times V_z^p} \{ & \int_0^a\int_0^b\int_0^c (U(x,y,z)\,|\,U_1^*(x,y,z))dxdydz + \\ & + \int_0^a\int_0^b\int_0^c (\nabla U(x,y,z)\,|\,U_2^*(x,y,z))dxdydz + \\ & + \int_0^b\int_0^c ((u(0,y,z)\,|\,u_3^*(y,z)) + (u(a,y,z)\,|\,u_4^*(y,z)))dydz + \\ & + \int_0^a\int_0^c ((\upsilon(x,0,z)\,|\,\upsilon_3^*(x,z)) + (\upsilon(x,b,z)\,|\,\upsilon_4^*(x,z)))dxdz + \\ & + \int_0^a\int_0^b ((w(x,y,0)\,|\,w_3^*(x,y)) + (w(x,y,c)\,|\,w_4^*(x,y)))dxdy\} < +\infty \end{aligned} \qquad (2)$$

верно тогда и только тогда, когда $u_{2x}^*(x,y,z) = u_1^*(x,y,z)$, $u_2^*(0,y,z) = u_3^*(y,z)$, $u_2^*(a,y,z) = -u_4^*(y,z)$; $\upsilon_{2y}^*(x,y,z) = \upsilon_1^*(x,y,z)$, $\upsilon_2^*(x,0,z) = \upsilon_3^*(x,z)$, $\upsilon_2^*(x,b,z) = -\upsilon_4^*(x,z)$; $w_{2z}^*(x,y,z) = w_1^*(x,y,z)$, $w_2^*(x,y,0) = w_3^*(x,y)$, $w_2^*(x,y,c) = -w_4^*(x,y)$.

Доказательство. Из (2) вытекает, что

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c (u(x,y,z)\,|\,u_1^*(x,y,z))dxdydz + \int_0^a\int_0^b\int_0^c (u_x(x,y,z)\,|\,u_2^*(x,y,z))dxdydz +$$
$$+\int_0^b\int_0^c ((u(0,y,z)\,|\,u_3^*(y,z)) + (u(a,y,z)\,|\,u_4^*(y,z)))dydz = 0 \qquad (3)$$

для любого $u \in V_x^p$. Так как $u(x,y,z) = u(0,y,z) + \int_0^x u_x(\tau,y,z)d\tau$, то

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c (u(x,y,z)\,|\,u_1^*(x,y,z))dxdydz = \int_0^a\int_0^b\int_0^c (u(0,y,z)\,|\,u_1^*(x,y,z))dxdydz +$$
$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^c (\int_0^x u_x(\tau,y,z)d\tau\,|\,u_1^*(x,y,z))dxdydz = \int_0^b\int_0^c (u(0,y,z)\,|\int_0^a u_1^*(x,y,z)dx)dydz +$$
$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^c (\int_0^x u_x(\tau,y,z)d\tau\,|\,d_x(\int_0^x u_1^*(\tau,y,z)d\tau - \int_0^a u_1^*(\tau,y,z)d\tau))dydz =$$
$$=\int_0^b\int_0^c (u(0,y,z)\,|\int_0^a u_1^*(x,y,z)dx)dydz +$$
$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^c (u_x(x,y,z)\,|\int_0^a u_1^*(\tau,y,z)d\tau - \int_0^x u_1^*(\tau,y,z)d\tau)dxdydz.$$

Ясно, что

$$\int_0^b\int_0^c (u(a,y,z)\,|\,u_4^*(y,z))dydz = \int_0^b\int_0^c (u(0,y,z)\,|\,u_4^*(y,z))dydz +$$
$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^c (u_x(x,y,z)\,|\,u_4^*(y,z))dxdydz.$$

Тогда из (3) получим, что

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c (u_x(x,y,z)\,|\,u_2^*(x,y,z) + \int_0^a u_1^*(\tau,y,z)d\tau - \int_0^x u_1^*(\tau,y,z)d\tau + u_4^*(y,z))dxdydz +$$
$$+\int_0^b\int_0^c (u(0,y,z)\,|\,u_3^*(y,z) + u_4^*(y,z))dydz + \int_0^b\int_0^c (u(0,y,z)\,|\int_0^a u_1^*(x,y,z)dx)dydz = 0$$

при $u \in V_x^p$. Отсюда вытекает, что

$$u_2^*(x,y,z) = \int_0^x u_1^*(\tau,y,z)d\tau - \int_0^a u_1^*(\tau,y,z)d\tau - u_4^*(y,z),$$

$$u_3^*(y,z)) + u_4^*(y,z) + \int_0^a u_1^*(x,y,z)dx = 0.$$

Поэтому $u_{2x}^*(x,y,z) = u_1^*(x,y,z)$, $u_2^*(a,y,z) = -u_4^*(y,z)$,

$$u_2^*(0,y,z) = -\int_0^a u_1^*(\tau,y,z)d\tau - u_4^*(y,z) = u_3^*(y,z).$$

Аналогично из (2) получим, что

$$\upsilon_{2y}^*(x,y,z) = \upsilon_1^*(x,y,z),\ \upsilon_2^*(x,0,z) = \upsilon_3^*(x,z),$$

$$\upsilon_2^*(x,b,z) = -\upsilon_4^*(x,z);\ w_{2z}^*(x,y,z) = w_1^*(x,y,z),$$

$$w_2^*(x,y,0) = w_3^*(x,y),\ w_2^*(x,y,c) = -w_4^*(x,y).$$

Справедливость обратного утверждения легко проверяется. Лемма доказана.

Отметим, что лемму 1 можно доказать также используя теорию обобщенную функцию.

Лемма 2. Пусть f, φ_1, φ_2 и φ_3 выпуклые нормальные интегранты, существуют функции $(u_0, \upsilon_0, w_0) \in V_x^p \times V_y^p \times V_z^p$, $\alpha(\cdot) \in L_1(D)$,

$\beta_1(\cdot) \in L_1([0,b]\times[0,c])$, $\beta_2(\cdot) \in L_1([0,a]\times[0,c])$,

$\beta_3(\cdot) \in L_1([0,a]\times[0,b])$ и число $c \ge 0$ такие, что

$$-\alpha(x,y,z) - c|\vartheta|^p \le f(x,y,z,\vartheta),\ -\beta_1(y,z) - c|\xi|^p \le \varphi_1(y,z,\xi),$$

$$-\beta_2(x,z) - c|\omega|^p \le \varphi_2(x,z,\omega),\ -\beta_3(x,y) - c|\gamma|^p \le \varphi_3(x,y,\gamma),$$

$$f(x,y,z,v,u_{0x}(x,y,z),\upsilon_{0y}(x,y,z),w_{0z}(x,y,z))) \le \alpha(x,y,z) + c|v|^p,$$

$$\varphi_1(y,z,u_0(0,y,z),u_0(a,y,z)+u) \le \beta_1(y,z) + c|u|^p,$$

$$\varphi_2(x,z,\upsilon_0(x,0,z),\upsilon_0(x,b,z)+\upsilon) \le \beta_2(x,z) + c|\upsilon|^p,$$

$$\varphi_3(x,y,w_0(x,y,0),w_0(x,y,c)+w) \le \beta_3(x,y) + c|w|^p.$$

Тогда существуют $(\overline{u}^*, \overline{\upsilon}^*, \overline{w}^*) \in L_q^{k_1+k_2+k_3}(D)$, где $\overline{u}_x^* \in L_q^{k_1}(D)$, $\overline{\upsilon}_y^* \in L_q^{k_2}(D)$, $\overline{w}_z^* \in L_q^{k_3}(D)$ такие, что

$$J_p^*(V^*) = \int_0^a\int_0^b\int_0^c f^*(x,y,z,u_1^*(x,y,z) - \overline{u}_x^*(x,y,z), \upsilon_1^*(x,y,z) -$$

$$-\overline{\upsilon}_y^*(x,y,z), w_1^*(x,y,z) - \overline{w}_z^*(x,y,z),$$

$$u_2^*(x,y,z) - \overline{u}^*(x,y,z), \upsilon_2^*(x,y,z) -$$

$$-\overline{\upsilon}^*(x,y,z), w_2^*(x,y,z) - \overline{w}^*(x,y,z))dxdydz +$$

$$+\int_0^b\int_0^c \varphi_1^*(y,z,-\overline{u}^*(0,y,z),\overline{u}^*(a,y,z))dydz+$$

$$+\int_0^a\int_0^c \varphi_2^*(x,z,-\overline{\upsilon}^*(x,0,z),\overline{\upsilon}^*(x,b,z))dxdz+$$

$$+\int_0^a\int_0^b \varphi_3^*(x,y,-\overline{w}^*(x,y,0),\overline{w}^*(x,y,c))dxdy,$$

где $V^*=(u_1^*,\upsilon_1^*,w_1^*,u_2^*,\upsilon_2^*,w_2^*)$.

Доказательство.

Положим

$$Q=\{(u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z),u_x(x,y,z),\upsilon_y(x,y,z),$$
$$w_z(x,y,z),u(0,y,z),u(a,y,z),$$
$$\upsilon(x,0,z),\upsilon(x,b,z),w(x,y,0),w(x,y,c):(u,\upsilon,w)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p\}.$$

Ясно, что

$$J_p^*(V^*)=\sup_{(u,v,w)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p}\{V^*(u,v,w)-J_p(u,v,w)\}=$$

$$=\sup\{\int_0^a\int_0^b\int_0^c((U_1(x,y,z),\,U_2(x,y,z))\,|\,(U_1^*(x,y,z),\,U_2^*(x,y,z)))dxdydz-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z,U_1(x,y,z),\,U_2(x,y,z))dxdydz-$$

$$-\int_0^b\int_0^c \varphi_1(y,z,u_3(y,z),u_4(y,z))dydz-$$

$$-\int_0^a\int_0^c \varphi_2(x,z,\upsilon_3(x,z),\upsilon_4(x,z))dxdz-\int_0^a\int_0^b \varphi_3(x,y,w_3(x,y),w_4(x,y))dxdy-$$

$$-\delta_Q(U_1,\,U_2,u_3,u_4,\upsilon_3,\upsilon_4,w_3,w_4):$$

$$(U_1,\,U_2,u_3,u_4,\upsilon_3,\upsilon_4,w_3,w_4)\in L_p^{2(k_1+k_2+k_3)}\times L_p^{2k_1}\times L_p^{2k_2}\times L_p^{2k_3}\}.$$

Положим

$$\widetilde{J}_p(U_1,U_2,u_3,u_4,\upsilon_3,\upsilon_4,w_3,w_4)=$$

$$=\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z,U_1(x,y,z),U_2(x,y,z))dxdydz+$$

$$+\int_0^b\int_0^c \varphi_1(y,z,u_3(y,z),u_4(y,z))dydz+\int_0^a\int_0^c \varphi_2(x,z,\upsilon_3(x,z),\upsilon_4(x,z))dxdz+$$

$$+\int_0^a\int_0^b \varphi_3(x,y,w_3(x,y),w_4(x,y))dxdy.$$

По условию отображение $\widetilde{J}_p$, действующее из

$L_p^{2(k_1+k_2+k_3)}(D)\times L_p^{2k_1}([0,b]\times[0,c])\times L_p^{2k_2}([0,a]\times[0,c])\times$

$\times L_p^{2k_3}([0,a]\times[0,b])$ в $\overline{R}$ полунепрерывно снизу (см. предложение 8.1.4[8]). Легко проверяется, что $0\in\operatorname{int}(dom\widetilde{J}-Q)$. Поэтому, если $J_p^*(V^*)<+\infty$, то по теореме 4.4.11[9] существует

$(\overline{u}_1^*,\overline{\upsilon}_1^*,\overline{w}_1^*,\overline{u}_2^*,\overline{\upsilon}_2^*,\overline{w}_2^*,\overline{u}_3^*,\overline{u}_4^*,\overline{\upsilon}_3^*,\overline{\upsilon}_4^*,\overline{w}_3^*,\overline{w}_4^*)\in L_q^{2(k_1+k_2+k_3)}(D)$

$\times L_q^{2k_1}([0,b]\times[0,c])\times L_q^{2k_2}([0,a]\times[0,c])\times L_q^{2k_3}([0,a]\times[0,b])$ такие, что

$$J^*(V^*)=\sup\{\int_0^a\int_0^b\int_0^c((U_1(x,y,z),\ U_2(x,y,z))\,|\,(U_1^*(x,y,z),U_2^*(x,y,z)))dxdydz-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\int_0^c((U_1(x,y,z),\ U_2(x,y,z))\,|\,(\overline{U}_1^*(x,y,z),\overline{U}_2^*(x,y,z)))dxdydz-$$

$$-\int_0^b\int_0^c((u_3(y,z),u_4(y,z))\,|\,(\overline{u}_3^*(y,z),\overline{u}_4^*(y,z)))dydz-$$

$$-\int_0^a\int_0^c((\upsilon_3(x,z),\upsilon_4(x,z))\,|\,(\overline{\upsilon}_3^*(x,z),\overline{\upsilon}_4^*(x,z)))dxdz-$$

$$-\int_0^a\int_0^b((w_3(x,y),w_4(x,y))\,|\,(\overline{w}_3^*(x,y),\overline{w}_4^*(x,y)))dxdy-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z,U_1(x,y,z),\ U_2(x,y,z))dxdydz-$$

$$-\int_0^b\int_0^c\varphi_1(y,z,u_3(y,z),u_4(y,z))dydz-\int_0^a\int_0^c\varphi_2(x,z,\upsilon_3(x,z),\upsilon_4(x,z))dxdz-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\varphi_3(x,y,w_3(x,y),w_4(x,y))dxdy:(U_1,\ U_2,\ u_3,u_4,\upsilon_3,\upsilon_4,w_3,w_4)\in$$

$$\in L_p^{2(k_1+k_2+k_3)}\times L_p^{2k_1}\times L_p^{2k_2}\times L_p^{2k_3}\}+$$

$$+\sup\{\int_0^a\int_0^b\int_0^c((U_1(x,y,z),\ U_2(x,y,z))\,|\,(\overline{U}_1^*(x,y,z),\overline{U}_2^*(x,y,z)))dxdydz+$$

$$+\int_0^b\int_0^c ((u_3(y,z),u_4(y,z))\,|\,(\overline{u}_3^*(y,z),\overline{u}_4^*(y,z)))dydz+$$

$$+\int_0^a\int_0^c ((\upsilon_3(x,z),\upsilon_4(x,z))\,|\,(\overline{\upsilon}_3^*(x,z),\overline{\upsilon}_4^*(x,z)))dxdz+$$

$$+\int_0^a\int_0^b ((w_3(x,y),w_4(x,y))\,|\,(\overline{w}_3^*(x,y),\overline{w}_4^*(x,y)))dxdy-$$

$$-\delta_Q(u_1,\upsilon_1,w_1,u_2,\upsilon_2,w_2,u_3,u_4,\upsilon_3,\upsilon_4,w_3,w_4)\}.$$

Применяя лемму 1 ко второму слагаемому получим, что верны равенства

$\overline{u}_{2\,x}^*(x,y,z)=\overline{u}_1^*(x,y,z)$, $\overline{u}_2^*(0,y,z)=\overline{u}_3^*(y,z)$, $\overline{u}_2^*(a,y,z)=-\overline{u}_4^*(y,z)$;

$\overline{\upsilon}_{2\,y}^*(x,y,z)=\overline{\upsilon}_1^*(x,y,z)$, $\overline{\upsilon}_2^*(x,0,z)=\overline{\upsilon}_3^*(x,z)$, $\overline{\upsilon}_2^*(x,b,z)=-\overline{\upsilon}_4^*(x,z)$;

$\overline{w}_{2\,z}^*(x,y,z)=\overline{w}_1^*(x,y,z)$, $\overline{w}_2^*(x,y,0)=\overline{w}_3^*(x,y)$, $\overline{w}_2^*(x,y,c)=-\overline{w}_4^*(x,y)$.

Поэтому

$$J^*(V^*)=\sup\{\int_0^a\int_0^b\int_0^c ((U_1(x,y,z),\,U_2(x,y,z))\,|\,(U_1^*(x,y,z)-$$

$$-\nabla\overline{U}_2^*(x,y,z),U_2^*(x,y,z)-\overline{U}_2^*(x,y,z)))dxdydz-$$

$$-\int_0^b\int_0^c ((u_3(y,z),u_4(y,z))\,|\,(\overline{u}_2^*(0,y,z),-\overline{u}_2^*(a,y,z)))dydz-$$

$$-\int_0^a\int_0^c ((\upsilon_3(x,z),\upsilon_4(x,z))\,|\,(\overline{\upsilon}_2^*(x,0,z),$$

$$-\overline{\upsilon}_2^*(x,b,z)))dxdz-\int_0^a\int_0^b ((w_3(x,y),w_4(x,y))\,|\,(\overline{w}_2^*(x,y,0),-\overline{w}_2^*(x,y,c)))dxdy-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z,U_1(x,y,z),\,U_2(x,y,z))dxdydz-$$

$$-\int_0^b\int_0^c \varphi_1(y,z,u_3(y,z),u_4(y,z))dydz-$$

$$-\int_0^a\int_0^c \varphi_2(x,z,\upsilon_3(x,z),\upsilon_4(x,z))dxdz-$$

$$-\int_0^a\int_0^b \varphi_3(x,y,w_3(x,y),w_4(x,y))dxdy\}=$$

$$=\int_0^a\int_0^b\int_0^c f^*(x,y,z,U_1^*(x,y,z)-\nabla\overline{U}_2^*(x,y,z),U_2^*(x,y,z)-\overline{U}_2^*(x,y,z))dxdydz+$$

$$+\int_0^b\int_0^c \varphi_1^*(y,z,-\overline{u}_2^*(0,y,z),\overline{u}_2^*(a,y,z))dydz+$$

$$+\int_0^a\int_0^c \varphi_2^*(x,z,-\overline{\upsilon}_2^*(x,0,z),\overline{\upsilon}_2^*(x,b,z))dxdz+$$

$$+\int_0^a\int_0^b \varphi_3^*(x,y,-\overline{w}_2^*(x,y,0),\overline{w}_2^*(x,y,c))dxdy.$$

Если $J_p^*(V^*)<+\infty$, то лемма доказана. Так как $(J_1+J_2)^*(V^*)\le J_1^*(V_1^*)+J_2^*(V_2^*)$, где $V^*=V_1^*+V_2^*$, то легко получим, что в случае $J_p^*(V^*)=+\infty$ лемма также верна. Лемма доказана.

Следствие 1. Если выполнены условия леммы 2, то $V^*\in\partial J(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют $(\overline{u}^*,\overline{\upsilon}^*,\overline{w}^*)\in L_q^{k_1+k_2+k_3}(D)$, где $\overline{u}_x^*\in L_q^{k_1}$, $\overline{\upsilon}_y^*\in L_q^{k_2}$, $\overline{w}_z^*\in L_q^{k_3}$ такие,
что

1) $(\overline{u}_1^*(x,y,z)-\overline{u}_x^*(x,y,z),\overline{\upsilon}_1^*(x,y,z)-\overline{\upsilon}_y^*(x,y,z),\overline{w}_1^*(x,y,z)-\overline{w}_z^*(x,y,z),u_2^*(x,y,z)-$
$-\overline{u}^*(x,y,z),\upsilon_2^*(x,y,z)-\overline{\upsilon}^*(x,y,z),w_2^*(x,y,z)-\overline{w}^*(x,y,z))\in$
$\in\partial f(x,y,z,\overline{u}(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z),\overline{w}(x,y,z),\overline{u}_x(x,y,z),\overline{\upsilon}_y(x,y,z),\overline{w}_z(x,y,z)),$

2) $(-\overline{u}^*(0,y,z),\overline{u}^*(a,y,z))\in\partial\varphi_1(y,z,\overline{u}(0,y,z),\overline{u}(a,y,z)),$

3) $(-\overline{\upsilon}^*(x,0,z),\ \overline{\upsilon}^*(x,b,z))\in\partial\varphi_2(x,z,\overline{\upsilon}(x,0,z),\overline{\upsilon}(x,b,z)),$

4) $(-\overline{w}^*(x,y,0),\overline{w}^*(x,y,c))\in\partial\varphi_3(x,y,\overline{w}(x,y,0),\overline{w}(x,y,c)).$

Доказательство. По предложению 1.5.1[8] $V^*\in\partial J(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$ в том и только том случае, когда $J(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})+J^*(V^*)=V^*(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$. Тогда из леммы 2 и из неравенства Фенхеля вытекает справедливость следствия.

Теорема 1. Пусть f,φ_1, φ_2 и φ_3 выпуклые нормальные интегранты. Для того, чтобы $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ являлась точкой минимума функционала $J_p(u,\upsilon,\mathrm{w})$ на пространстве $V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ достаточно, а если существуют функции
$(u_0,\upsilon_0,w_0)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$, $\alpha(\cdot)\in L_1(D)$, $\beta_1(\cdot)\in L_1([0,b]\times[0,c])$,

$\beta_2(\cdot)\in L_1([0,a]\times[0,c])$, $\beta_3(\cdot)\in L_1([0,a]\times[0,b])$ и число $c\ge 0$ такие, что
$-\alpha(x,y,z)-c|\vartheta|^p\le f(x,y,z,\vartheta)$, $-\beta_1(y,z)-c|\xi|^p\le\varphi_1(y,z,\xi)$,
$-\beta_2(x,z)-c|\omega|^p\le\varphi_2(x,z,\omega)$, $-\beta_3(x,y)-c|\gamma|^p\le\varphi_3(x,y,\gamma)$,
$f(x,y,z,\nu,u_{0x}(x,y,z),\overline{\upsilon}_{0y}(x,y,z),\overline{w}_{0z}(x,y,z)))\le\alpha(x,y,z)+c|\nu|^p$,
$\varphi_1(y,z,u_0(0,y,z),u_0(a,y,z)+u)\le\beta_1(y,z)+c|u|^p$,
$\varphi_2(x,z,\upsilon_0(x,0,z),\upsilon_0(x,b,z)+\upsilon)\le\beta_2(x,z)+c|\upsilon|^p$,
$\varphi_3(x,y,w_0(x,y,0),w_0(x,y,c)+w)\le\beta_3(x,y)+c|w|^p$, то и необходимо, чтобы нашлись функции,
$(\overline{u}^*,\overline{\upsilon}^*,\overline{w}^*)\in L_q^{k_1+k_2+k_3}(D)$, где $\overline{u}_x^*\in L_q^{k_1}$, $\overline{\upsilon}_y^*\in L_q^{k_2}$, $\overline{w}_z^*\in L_q^{k_3}$ такие, что

1) $(\overline{u}_x^*(x,y,z),\overline{\upsilon}_y^*(x,y,z),\overline{w}_z^*(x,y,z),\ \overline{u}^*(x,y,z),\overline{\upsilon}^*(x,y,z),\overline{w}^*(x,y,z))\in$
$\in\partial f(x,y,z,\overline{u}(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z),\overline{w}(x,y,z),\overline{u}_x(x,y,z),\overline{\upsilon}_y(x,y,z),\overline{w}_z(x,y,z))$,

2) $(\overline{u}^*(0,y,z),-\overline{u}^*(a,y,z)))\in\partial\varphi_1(y,z,\overline{u}(0,y,z),\overline{u}(a,y,z))$,

3) $(\overline{\upsilon}^*(x,0,z),-\overline{\upsilon}^*(x,b,z)))\in\partial\varphi_2(x,z,\overline{\upsilon}(x,0,z),\overline{\upsilon}(x,b,z))$,

4) $(\overline{w}^*(x,y,0),-\overline{w}^*(x,y,c)))\in\partial\varphi_3(x,y,\overline{w}(x,y,0),\overline{w}(x,y,c))$.

Доказательство. Необходимость. Так как $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{\mathrm{w}})$ являлась точкой минимума функционала $J_p(u,\upsilon,\mathrm{w})$ на пространстве $V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$, то $V^*=0\in\partial J(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$. Из равенства $V^*=(u_1^*,\upsilon_1^*,w_1^*,u_2^*,\upsilon_2^*,w_2^*)=0$ вытекает, что

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c(u(x,y,z)\,|\,u_1^*(x,y,z))dxdydz+\int_0^a\int_0^b\int_0^c(u_x(x,y,z)\,|\,u_2^*(x,y,z))dxdydz+$$

$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^c(\upsilon(x,y,z)\,|\,\upsilon_1^*(x,y,z))dxdydz+\int_0^a\int_0^b\int_0^c(\upsilon_y(x,y,z)\,|\,\upsilon_2^*(x,y,z))dxdydz+$$

$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^c(w(x,y,z)\,|\,w_1^*(x,y,z))dxdydz+\int_0^a\int_0^b\int_0^c(w_z(x,y,z)\,|\,w_2^*(x,y,z))dxdydz=0.$$

По лемме 1 отсюда имеем, что
$u_{2x}^*(x,y,z)=u_1^*(x,y,z)$, $u_2^*(0,y,z)=u_2^*(a,y,z)=0$;

$\upsilon_{2y}^*(x,y,z)=\upsilon_1^*(x,y,z)$, $\upsilon_2^*(x,0,z)=\upsilon_2^*(x,b,z)=0$; $w_{2z}^*(x,y,z)=w_1^*(x,y,z)$,
$w_2^*(x,y,0)=w_2^*(x,y,c)=0$.

Тогда по следствию 1 существуют $(\overline{u}_2^*, \overline{\upsilon}_2^*, \overline{w}_2^*) \in L_q^{k_1+k_2+k_3}(D)$, где $\overline{u}_{2\,x}^* \in L_q^{k_1}$, $\overline{\upsilon}_{2\,y}^* \in L_q^{k_2}$, $\overline{w}_{2\,z}^* \in L_q^{k_3}$ такие, что

1) $(u_{2\,x}^*(x,y,z) - \overline{u}_{2\,x}^*(x,y,z), \upsilon_{2\,y}^*(x,y,z) - \overline{\upsilon}_{2\,y}^*(x,y,z), w_{2\,z}^*(x,y,z) - \overline{w}_{2\,z}^*(x,y,z),$

$u_2^*(x,y,z) - \overline{u}_2^*(x,y,z),\ \upsilon_2^*(x,y,z) - \overline{\upsilon}_2^*(x,y,z), w_2^*(x,y,z) - \overline{w}_2^*(x,y,z)) \in$

$\in \partial f(x,y,z,\overline{u}(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z),\overline{w}(x,y,z),\overline{u}_x(x,y,z),\overline{\upsilon}_y(x,y,z),\overline{w}_z(x,y,z)),$

2) $(-\overline{u}_2^*(0,y,z),\overline{u}_2^*(a,y,z)) \in \partial\varphi_1(y,z,\overline{u}(0,y,z),\overline{u}(a,y,z)),$

3) $(-\overline{\upsilon}_2^*(x,0,z),\overline{\upsilon}_2^*(x,b,z)) \in \partial\varphi_2(x,z,\overline{\upsilon}(x,0,z),\overline{\upsilon}(x,b,z)),$

4) $(-\overline{w}_2^*(x,y,0),\overline{w}_2^*(x,y,c)) \in \partial\varphi_3(x,y,\overline{w}(x,y,0),\overline{w}(x,y,c)).$

Заменив $\overline{u}^*(x,y,z) = u_2^*(x,y,z) - \overline{u}_2^*(x,y,z),\ \overline{\upsilon}^*(x,y,z) = \upsilon_2^*(x,y,z) - \overline{\upsilon}_2^*(x,y,z),$ $\overline{w}^*(x,y,z) = w_2^*(x,y,z) - \overline{w}_2^*(x,y,z)$ получим, что

1) $(\overline{u}_x^*(x,y,z),\overline{\upsilon}_y^*(x,y,z),\overline{w}_z^*(x,y,z),\ \overline{u}^*(x,y,z),\overline{\upsilon}^*(x,y,z),\overline{w}^*(x,y,z)) \in$

$\in \partial f(x,y,z,\overline{u}(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z),\overline{w}(x,y,z),\overline{u}_x(x,y,z),\overline{\upsilon}_y(x,y,z),\overline{w}_z(x,y,z)),$

2) $(\overline{u}^*(0,y,z),-\overline{u}^*(a,y,z)) \in \partial\varphi_1(y,z,\overline{u}(0,y,z),\overline{u}(a,y,z)),$

3) $(\overline{\upsilon}^*(x,0,z),-\overline{\upsilon}^*(x,b,z)) \in \partial\varphi_2(x,z,\overline{\upsilon}(x,0,z),\overline{\upsilon}(x,b,z)),$

4) $(\overline{w}^*(x,y,0),-\overline{w}^*(x,y,c)) \in \partial\varphi_3(x,y,\overline{w}(x,y,0),\overline{w}(x,y,c)).$

Необходимость доказана. Достаточность теоремы проверяется непосредственно. Теорема доказана

2. Об экстремальной задаче для выпуклых трехмерных дифференциальных включений

Пусть R^n n мерное евклидово пространство. Через 2^{R^n} обозначим совокупность всех подмножеств пространства R^n. Совокупность всех не пустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств пространства R^n обозначим через $comp\,R^n$ $(conv\,R^n)$. Пусть $a_i : [0,1]^3 \times R^{k_1+k_2+k_3} \to comp\,R^{k_i}$, $i = 1,2,3,$ где k_1, k_2, k_3 натуральные числа, $M_i : [0,1]^2 \to 2^{R^{k_i}}$, $i = 1,2,3,$ измеримы; $M_1(y,z),$ $M_2(x,z)$ и $M_3(x,y)$ не пусты при $x,y,z \in [0,1]$.

Если $A, C \in comp\,R^n$, то положим

$$\rho_x(A, C) = \max\left\{\sup_{x\in C} d(x,A),\ \sup_{y\in A} d(y,C)\right\},$$

где $d(x,A) = \inf\{|x-y| : y \in A\}$.

Функция $(u,\upsilon,w)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$, удовлетворяющая включениям

$$\begin{aligned}
&u_x(x,y,z)\in a_1(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)),\\
&\upsilon_y(x,y,z)\in a_2(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)),\\
&w_z(x,y,z)\in a_3(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)),\\
&u(0,y,z)\in M_1(y,z),\ \ \upsilon(x,0,z)\in M_2(x,z)\ ,\ \ w(x,y,0)\in M_3(x,y)
\end{aligned}\tag{1}$$

при $x,y,z\in[0,1]$, называется решением включения (1).

Теорема 1 [6]. Пусть отображения $(x,y,z)\to a_i(x,y,z,\omega)$ измеримы, $a_i(x,y,z,\omega)$ не пусты и компактны при всех $(x,y,z,\omega)\in[0,1]^3\times R^{k_1+k_2+k_3}$ и

$$\rho_x(a_i(x,y,z,\omega_1),a_i(x,y,z,\omega))\le M|\omega_1-\omega|$$

при $\omega,\ \omega_1\in R^{k_1+k_2+k_3}$, $i=1,2,3$. Тогда, если для $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
&d(\overline{u}_x(x,y,z),a_1(x,y,z,\overline{u}(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z),\overline{w}(x,y,z)))\le\rho_1(x,y,z),\\
&d(\overline{\upsilon}_y(x,y,z),a_2(x,y,z,\overline{u}(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z),\overline{w}(x,y,z)))\le\rho_2(x,y,z),\\
&d(\overline{w}_z(x,y,z),a_3(x,y,z,\overline{u}(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z),\overline{w}(x,y,z)))\le\rho_3(x,y,z),\\
&d(\overline{u}(0,y,z),\varphi_1(y,z))\le\xi_1(y,z),\ d(\overline{\upsilon}(x,0,z),\varphi_2(x,z))\le\xi_2(x,z),\\
&d(\overline{w}(x,y,0),\varphi_3(x,y))\le\xi_3(x,y),
\end{aligned}$$

где $\rho_i(\cdot)\in L_p[0,1]^3$ *при* $i=1,2,3,\ \xi_1(\cdot),\ \xi_2(\cdot),\ \xi_3(\cdot)\in L_p[0,1]^2$, функции φ_1,φ_2 и φ_3 измеримы, то существует такое решение $(u,\upsilon,w)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ задачи

$$\begin{aligned}
&u_x(x,y,z)\in a_1(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)),\quad u(0,y,z)=\varphi_1(y,z),\\
&\upsilon_y(x,y,z)\in a_2(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)),\quad \upsilon(x,0,z)=\varphi_2(x,z),\\
&w_z(x,y,z)\in a_3(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)),\quad w(x,y,0)=\varphi_3(x,y),
\end{aligned}$$

что

$$\begin{aligned}
|u(x,y,z)-\overline{u}(x,y,z)|&\le\xi_1(y,z)+\int_0^1\rho_1(t,y,x)dt+e^{Mx}\eta_1(y,z)+Me^{My}\int_0^1\eta_2(t,z)dt+\\
&+Me^{Mz}\int_0^1\eta_3(t,y)dt+\frac{1}{2}Me^{2M(x+y)}\int_0^1\eta_1(s,z)ds+\frac{1}{2}Me^{2M(x+z)}\int_0^1\eta_1(y,\nu)d\nu+\\
&+\tfrac{1}{2}Me^{2M(x+y)}\int_0^1\eta_2(t,z)dt+\tfrac{1}{2}Me^{2M(x+z)}\int_0^1\eta_3(t,y)dt+3{,}5dM^2e^{3,5M(x+y+z)}+2dM^2e^{2M(y+z)},
\end{aligned}$$

$$|\upsilon(x,y,z)-\overline{\upsilon}(x,y,z)|\le\xi_2(x,z)+\int_0^1\rho_2(x,s,z)ds+e^{My}\eta_2(x,z)+Me^{Mx}\int_0^1\eta_1(s,z)ds+$$

$$+Me^{Mz}\int_0^1 \eta_3(x,s)ds+\frac{1}{2}Me^{2M(x+y)}\int_0^1 \eta_1(s,z)ds+\frac{1}{2}Me^{2M(x+y)}\int_0^1 \eta_2(t,z)dt+$$

$$+\frac{1}{2}Me^{2M(y+z)}\int_0^1 \eta_2(x,\nu)d\nu++\frac{1}{2}Me^{2M(y+z)}\int_0^1 \eta_3(x,s)ds+3{,}5dM^2e^{3{,}5M(x+y+z)}+$$

$$+2dM^2e^{2M(x+z)},$$

$$\left|w(x,y,z)-\overline{w}(x,y,z)\right|\le \xi_3(x,y)+\int_0^1 \rho_3(x,y,\nu)d\nu+e^{Mz}\eta_3(x,y)+Me^{Mx}\int_0^1 \eta_1(y,s)ds+$$

$$+Me^{My}\int_0^1 \eta_2(x,s)ds+\frac{1}{2}Me^{2M(x+z)}\int_0^1 \eta_1(y,\vartheta)d\vartheta+\frac{1}{2}Me^{2M(y+z)}\int_0^1 \eta_2(x,\nu)d\nu+$$

$$+\frac{1}{2}Me^{2M(x+z)}\int_0^1 \eta_3(t,y)dt+\frac{1}{2}Me^{2M(y+z)}\int_0^1 \eta_3(x,s)ds+$$

$$+3{,}5dM^2e^{3{,}5M(x+y+z)}+2dM^2e^{2M(x+y)},$$

$$\left|u_x(x,y,z)-\overline{u}_x(x,y,z)\right|\le \rho_1(x,y,z)+D(x,y,z),$$

$$\left|\upsilon_y(x,y,z)-\overline{\upsilon}_y(x,y,z)\right|\le \rho_2(x,y,z)+D(x,y,z),$$

$$\left|w_z(x,y,z)-\overline{w}_z(x,y,z)\right|\le \rho_3(x,y,z)+D(x,y,z),$$

где $\eta_1(y,z)=\xi_1(y,z)+\int_0^1 \rho_1(t,y,z)dt,\quad \eta_2(x,z)=\xi_2(x,z)+\int_0^1 \rho_2(x,s,z)ds,$

$$\eta_3(x,y)=\xi_3(x,y)+\int_0^1 \rho_3(x,y,\nu)d\nu,\quad d_1=\int_0^1\int_0^1 \eta_1(s,\nu)dsd\nu,\; d_2=\int_0^1\int_0^1 \eta_2(t,\nu)dtd\nu,$$

$$d_3=\int_0^1\int_0^1 \eta_3(t,s)dtds,$$

$$D(x,y,z)=Me^{Mx}\eta_1(y,z)+Me^{My}\eta_2(x,z)+Me^{Mz}\eta_3(x,y)+M^2e^{2M(x+y)}\int_0^1 \eta_1(s,z)ds+$$

$$+M^2e^{2M(x+z)}\int_0^1 \eta_1(y,\nu)d\nu+M^2e^{2M(x+y)}\int_0^1 \eta_2(t,z)dt+M^2e^{2M(y+z)}\int_0^1 \eta_2(x,\nu)d\nu+$$

$$+M^2e^{2M(x+z)}\int_0^1 \eta_3(t,y)dt+M^2e^{2M(y+z)}\int_0^1 \eta_3(x,s)ds+12{,}25dM^3e^{3{,}5M(x+y+z)},$$

$$d=\max\{d_1,d_2,d_3\}.$$

Обозначим

$\dot{V}_x^p \times \dot{V}_y^p \times \dot{V}_z^p =$

$= \{(u, \upsilon, w) \in V_x^p \times V_y^p \times V_z^p : \ u(0, y, z) = 0, \ \upsilon(x, 0, z) = 0, \ w(x, y, 0) = 0\}$,

$\dot{V}^p = \dot{V}_x^p \times \dot{V}_y^p \times \dot{V}_z^p$ и $V^p = V_x^p \times V_y^p \times V_z^p$.

Если $(u, \upsilon, w) \in V^p$ и $\widetilde{p} = \begin{cases} p-1, \ если \ p \in N, \\ p, \quad если \ p \notin N \end{cases}$, то легко проверяется, что (см.[3], с.90)

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|u(1, y, z)\right|^p dydz\right)^{\frac{1}{p}} \le 3^{\frac{\widetilde{p}+1}{p}} (\|u(\cdot)\|_p + \|u_x(\cdot)\|_p),$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|\upsilon(x, 1, z)\right|^p dxdz\right)^{\frac{1}{p}} \le 3^{\frac{\widetilde{p}+1}{p}} (\|\upsilon(\cdot)\|_p + \|\upsilon_y(\cdot)\|_p),$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|w(x, y, 1)\right|^p dxdz\right)^{\frac{1}{p}} \le 3^{\frac{\widetilde{p}+1}{p}} (\|w(\cdot)\|_p + \|w_z(\cdot)\|_p).$$

Пусть $f : [0,1]^3 \times R^{2(k_1+k_2+k_3)} \to \overline{R}$, $\varphi_1 : [0,1]^2 \times R^{2k_1} \to \overline{R}$, $\varphi_2 : [0,1]^2 \times R^{2k_2} \to \overline{R}$, $\varphi_3 : [0,1]^2 \times R^{2k_3} \to \overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, где k_1, k_2, k_3, натуральные числа; $a_1 : [0,1]^3 \times R^{k_1+k_2+k_3} \to conv(R^{k_1})$, $a_2 : [0,1]^3 \times R^{k_1+k_2+k_3} \to conv(R^{k_2})$, $a_3 : [0,1]^3 \times R^{k_1+k_2+k_3} \to conv(R^{k_3})$, $M_i : [0,1]^2 \to 2^{R^{k_i}}$, $i = 1,2,3$, измеримы; $M_1(y, z)$, $M_2(x, z)$ и $M_3(x, y)$ не пустые замкнутые выпуклые множества при всех $x, y, z \in [0,1]$.

Далее предполагаем, что $gr\, a_1$, $gr\, a_2$ и $gr\, a_3$ выпуклые замкнутые множества.

Если $(u, \upsilon, w) \in V_x^p \times V_y^p \times V_z^p$, то обозначим

$$U(x, y, z) = (u(x, y, z), \upsilon(x, y, z), w(x, y, z)),$$

$$\nabla U(x, y, z) = (u_x(x, y, z), \upsilon_y(x, y, z), w_z(x, y, z)).$$

Тогда включение (1) можно написать в виде

$\nabla U(x, y, z) \in (a_1(x, y, z, U(x, y, z)), \ a_2(x, y, z, U(x, y, z)), \ a_3(x, y, z, U(x, y, z)))$,

$(u(0, y, z), \ \upsilon(x, 0, z), \ w(x, y, 0)) \in (M_1(y, z), M_2(x, z), M_3(x, y))$ при $x, y, z \in [0,1]$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J_p(u,\upsilon,w)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z,U(x,y,z),\nabla U(x,y,z))dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(y,z,u(0,y,z),u(1,y,z))dydz+ \qquad (2)$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_2(x,z,\upsilon(x,0,z),\upsilon(x,1,z))dxdz+\int_0^1\int_0^1 \varphi_3(x,y,w(x,y,0),w(x,y,1))dxdy$$

среди всех решений задачи (1). Требуется найти необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи (1), (2).

Будем говорить, что решение $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{\mathrm{w}})\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ задачи (1) являлась точкой минимума функционала $J_p(u,\upsilon,\mathrm{w})$ среди всех решений задачи (1), если $\left|J_p(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{\mathrm{w}})\right|<+\infty$ и справедливо неравенство $J_p(u,\upsilon,\mathrm{w})\ge J_p(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{\mathrm{w}})$ при всех решений (u,υ,w) задачи (1).

Положим

$$\Omega_1(x,y,z,u,\upsilon,w,p)=\begin{cases}0\ \ : & p\in a_1(x,y,z,u,\upsilon,w),\\ +\infty: & p\notin a_1(x,y,z,u,\upsilon,w),\end{cases}$$

$$\Omega_2(x,y,z,u,\upsilon,w,q)=\begin{cases}0\ \ : & q\in a_2(x,y,z,u,\upsilon,w),\\ +\infty: & q\notin a_2(x,y,z,u,\upsilon,w),\end{cases}$$

$$\Omega_3(x,y,z,u,\upsilon,w,g)=\begin{cases}0\ \ : & g\in a_3(x,y,z,u,\upsilon,w),\\ +\infty: & g\notin a_3(x,y,z,u,\upsilon,w),\end{cases}$$

$$\omega_1(y,z,u)=\begin{cases}0\ \ : & u\in M_1(y,z),\\ +\infty: & u\notin M_1(y,z),\end{cases}$$

$$\omega_2(x,z,\upsilon)=\begin{cases}0\ \ : & \upsilon\in M_2(x,z),\\ +\infty: & \upsilon\notin M_2(x,z),\end{cases}\qquad \omega_3(x,y,w)=\begin{cases}0\ \ : & w\in M_3(x,y),\\ +\infty: & w\notin M_3(x,y).\end{cases}$$

Ясно, что поставленная задача эквивалентна следующей задаче

$$I_p(u,\upsilon,w)=J_p(u,\upsilon,w)+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\{\Omega_1(x,y,z,U(x,y,z),u_x(x,y,z))+$$

$$+\Omega_2(x,y,z,U(x,y,z),\upsilon_y(x,y,z))+\Omega_3(x,y,z,U(x,y,z),w_z(x,y,z))\}dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \omega_1(y,z,u(0,y,z))dydz+\int_0^1\int_0^1 \omega_2(x,z,\upsilon(x,0,z))dxdz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \omega_3(x,y,w(x,y,0))dxdy \to \inf, \qquad (u,\upsilon,w)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p. \qquad (3)$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi_p(u,\upsilon,w,\tilde u,\tilde\upsilon,\tilde w)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar f(x,y,z,U(x,y,z),\nabla U(x,y,z)+\nabla\tilde U(x,y,z))dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \overline{\varphi}_1(y,z,u(0,y,z),u(1,y,z))dydz+\int_0^1\int_0^1 \overline{\varphi}_2(x,z,\upsilon(x,0,z),\upsilon(x,1,z))dxdz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \overline{\varphi}_3(x,y,w(x,y,0),w(x,y,1))dxdy,$$

где $\tilde U(x,y,z)=(\tilde u(x,y,z),\tilde\upsilon(x,y,z),\tilde w(x,y,z))\in \dot V^p$,

$U_1(x,y,z)=(u_1(x,y,z),\upsilon_1(x,y,z),w_1(x,y,z))$

$\bar f(x,y,z,U(x,y,z),U_1(x,y,z))=f(x,y,z,U(x,y,z),U_1(x,y,z))+$

$+\Omega_1(x,y,z,U(x,y,z),u_1(x,y,z))+$

$+\Omega_2(x,y,z,U(x,y,z),\upsilon_1(x,y,z))+\Omega_3(x,y,z,U(x,y,z),w_1(x,y,z)),$

$\overline{\varphi}_1(y,z,u,u_1)=\varphi_1(y,z,u,u_1)+\omega_1(y,z,u),\ \ \overline{\varphi}_2(x,z,\upsilon,\upsilon_1)=\varphi_2(x,z,\upsilon,\upsilon_1)+\omega_2(x,z,\upsilon),$

$\overline{\varphi}_3(x,y,w,w_1)=\varphi_3(x,y,w,w_1)+\omega_3(x,y,w)$.

Положим $h(\tilde U)=\inf\{\Phi_p(U,\tilde U):U\in V^p\}$. Покажем, что при некоторых условиях h субдифференцируема в нуле, т.е. задача $\inf\{I_p(U):U\in V^p\}$ стабильна (см.[8]).

Если $M\subset R^k$, то обозначим $\|M\|=\sup\{|z|:z\in M\}$.

Теорема 2. Пусть $f:[0,1]^3\times R^{2(k_1+k_2+k_3)}\to R$, $\varphi_1:[0,1]^2\times R^{2k_1}\to \overline{R}$, $\varphi_2:[0,1]^2\times R^{2k_2}\to \overline{R}$, $\varphi_3:[0,1]^2\times R^{2k_3}\to \overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, где k_1,k_2,k_3, натуральные числа; $a_i:[0,1]^3\times R^{k_1+k_2+k_3}\to conv(R^{k_i})$ и $M_i:[0,1]^2\to conv(R^{k_i})$, $i=1,2,3,$ многозначные отображения; $(x,y,z)\to a_i(x,y,z,u,\upsilon,w)$, $(y,z)\to M_1(y,z)$, $(x,z)\to M_2(x,z)$ и $(x,y)\to M_3(x,y)$ измеримы при $x,y,z\in[0,1]$, $gr\,a_i(x,y,z,\cdot)$, $i=1,2,3,$ выпуклые замкнутые множества, существует число $k>0$ такое, что $\|a_i(x,y,z,u,\upsilon,w)\|\le k(1+|(u,\upsilon,w)|)$ при $(u,\upsilon,w)\in R^{k_1+k_2+k_3}$ и существуют число $\alpha>0$, функции $d(\cdot)\in L_1([0,1]^3)$, $b_i(\cdot)\in L_1([0,1]^2)$ такие, что $|f(x,y,z,\omega)|\le d(x,y,z)+\alpha|\omega|^p$ при

$\omega\in R^{2(k_1+k_2+k_3)}$, $|\varphi_1(y,z,u^0(0,y,z),u_1)|\le b_1(y,z)+\alpha|u_1|^p$ при $u_1\in R^{k_1}$, $|\varphi_2(x,z,\upsilon^0(x,0,z),\upsilon_1)|\le b_2(x,z)+\alpha|\upsilon_1|^p$ при $\upsilon_1\in R^{k_2}$,

$\left|\varphi_3(x,y,w^0(x,y,0),w_1)\right| \le b_3(x,y)+\alpha\left|w_1\right|^p$ при $w_1 \in R^{k_3}$, $(u^0,\upsilon^0,w^0)\in V^p$ решение задачи (1) и $\inf\{I_p(U):U\in V^p\}$ конечно. Тогда задача (3) стабильна.

Доказательство. Из теоремы 3.1.3[10] вытекает, что

$$\rho_x(a_i(x,y,z,\omega_1),a_i(x,y,z,\omega)) \le 2k\left|\omega_1-\omega\right| \text{ при } \omega_1,\ \omega\in R^{k_1+k_2+k_3}.$$

Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta>0$ и решение $(u,\upsilon,w)_\nu$ при $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\in L_p^{k_1+k_2+k_3}([0,1]^3)$,

$\left\|\nu\right\|_{L_p^{k_1+k_2+k_3}([0,1]^3)} = \left\|\nu_1\right\|_{L_p^{k_1}([0,1]^3)} + \left\|\nu_2\right\|_{L_p^{k_2}([0,1]^3)} + \left\|\nu_3\right\|_{L_p^{k_3}([0,1]^3)} < \delta$ задачи

$$\begin{aligned}
&u_x(x,y,z)\in a_1(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z))-\nu_1(x,y,z),\\
&\upsilon_y(x,y,z)\in a_2(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z))-\nu_2(x,y,z),\\
&w_z(x,y,z)\in a_3(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z))-\nu_3(x,y,z),\\
&u(0,y,z)=u^0(0,y,z)\ ,\ \upsilon(x,0,z)=\upsilon^0(x,0,z),\ w(x,y,0)=w^0(x,y,0)\\
&\textit{при}\ \ x,y,z\in[0,1]
\end{aligned}\tag{4}$$

такие, что $\left\|(u,\upsilon,w)_\nu-(u^0,\upsilon^0,w^0)\right\|_{V^p}<\varepsilon.$ Положим $M=2k$. Ясно, что

$$\rho_x(a_i(x,y,z,\omega_1)-\nu_i(x,y,z),a_i(x,y,z,\omega)-\nu_i(x,y,z)) \le M\left|\omega_1-\omega\right|$$

при $\omega_1,\omega\in R^{k_1+k_2+k_3}$. Отметим, что

$$\begin{aligned}
&\rho(u_x^0(x,y,z),a_1(x,y,z,u^0(x,y,z),\upsilon^0(x,y,z),w^0(x,y,z))-\nu_1(x,y,z))\le\\
&\le\left|\nu_1(x,y,z)\right|
\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}
&\rho(\upsilon_y^0(x,y,z),a_2(x,y,z,u^0(x,y,z),\upsilon^0(x,y,z),w^0(x,y,z))-\nu_2(x,y,z))\le\\
&\le\left|\nu_2(x,y,z)\right|
\end{aligned},$$

$$\rho(w_z^0(x,y,z),a_3(x,y,z,u^0(x,y,z),\upsilon^0(x,y,z),w^0(x,y,z))-\nu_3(x,y,z))\le\left|\nu_3(x,y,z)\right|.$$

Положив в теореме 1

$\varphi_1(y,z)=u^0(0,y,z),\ \ \zeta_1(y,z)=0,\ \ \varphi_2(x,z)=\upsilon^0(x,0,z),$

$\zeta_2(x,z)=0,\ \varphi_3(x,y)=w^0(x,y,0),\ \ \zeta_3(x,y)=0\ \textit{при}\ \ x,y,z\in[0,1]$,

$\rho_i(x,y,z)=\left|\nu_i(x,y,z)\right|$ получим, что существует такое решение (u,υ,w) задачи (4), что выполняется утверждение теоремы 1 .

Из условия теоремы 2 вытекает, что функционал

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z),u_1(x,y,z),\upsilon_1(x,y,z),w_1(x,y,z))dxdydz$$

непрерывен в пространстве $L_p^{2(k_1+k_2+k_3)}([0,1]^3)$.

Также имеем, что функционал

$$\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(y,z,u^0(0,y,z),\nu_1(y,z))dydz + \int_0^1\int_0^1 \varphi_2(x,z,\upsilon^0(x,0,z),\nu_2(x,z))dxdz +$$
$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_3(x,y,w^0(x,y,0),\nu_3(x,y))dxdy$$

непрерывен в пространстве $L_p^{k_1}([0,1]^2)\times L_p^{k_2}([0,1]^2)\times L_p^{k_3}([0,1]^2)$ относительно переменной (ν_1,ν_2,ν_3).

Пусть $(u,\upsilon,w)\in \dot{V}^p$. Ясно, что $u(x,y,z)=\int_0^x u_x(\eta,y,z)d\eta$. Поэтому

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|u(1,y,z)\right|^p dydz\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^1\int_0^1\left(\int_0^1 \left|u_x(\eta,y,z)\right|d\eta\right)^p dydz\right)^{\frac{1}{p}} \le$$
$$\le \left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|u_x(x,y,z)\right|^p dxdydz)\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\|u_x(\cdot)\right\|_p \le \left\|u(\cdot)\right\|_{V_x^p}.$$

Аналогично имеем, что

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|\upsilon(x,1,z)\right|^p dxdz\right)^{\frac{1}{p}} \le \left\|\upsilon(\cdot)\right\|_{V_y^p},\quad \left(\int_0^1\int_0^1 \left|w(x,y,1)\right|^p dxdz\right)^{\frac{1}{p}} \le \left\|w(\cdot)\right\|_{V_z^p}.$$

По условию теоремы 2 имеем, что функционал

$$\widetilde{J}_p(\omega,\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z,\omega(x,y,z))dxdydz +$$
$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(y,z,u^0(0,y,z),\nu_1(y,z))dydz +$$
$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_2(x,z,\upsilon^0(x,0,z),\nu_2(x,z))dxdz + \int_0^1\int_0^1 \varphi_3(x,y,w^0(x,y,0),\nu_3(x,y))dxdy$$

непрерывен в пространстве

$$L_p^{2(k_1+k_2+k_3)}([0,1]^3)\times L_p^{k_1}([0,1]^2)\times L_p^{k_2}([0,1]^2)\times L_p^{k_3}([0,1]^2).$$

Поэтому функционал

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z,U^0(x,y,z)+U(x,y,z),\nabla U^0(x,y,z)+\nabla U(x,y,z))dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(y,z,u^0(0,y,z),u^0(1,y,z)+u(1,y,z))dydz+$$

$$\int_0^1\int_0^1 \varphi_2(x,z,\upsilon^0(x,0,z),\upsilon^0(x,1,z)+\upsilon(x,1,z))dxdz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_3(x,y,w^0(x,y,0),w^0(x,y,1)+w(x,y,1))dxdy$$

непрерывен в $\dot{V}^p$. Отсюда следует, что функционал

$$E_p(u,\upsilon,w,\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z,U^0(x,y,z)+U(x,y,z),\nabla U^0(x,y,z)+$$

$$+\nabla U(x,y,z)+\nabla\widetilde{U}(x,y,z))dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(y,z,u^0(0,y,z),u^0(1,y,z)+u(1,y,z))dydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_2(x,z,\upsilon^0(x,0,z),\upsilon^0(x,1,z)+\upsilon(x,1,z))dxdz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \varphi_3(x,y,w^0(x,y,0),w^0(x,y,1)+w(x,y,1))dxdy,$$

непрерывен в точке нуль в пространстве $\dot{V}^p\times\dot{V}^p$, т.е. в точке (0,0,0),(0,0,0)).

Из выпуклости и непрерывности E_p в нуле вытекает, что существует числа $\alpha>0$ и M ,такие, что $E_p(u,\upsilon,w,\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})\le M$ при $(u,\upsilon,w,\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})\in\dot{V}^p\times\dot{V}^p$, $\|(u,\upsilon,w,\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})\|\le\alpha$.

По теореме 1 для $\frac{\alpha}{2}$ существуют $\delta>0$ и решение $(u,\upsilon,w)_{(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})}$ при $(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})\in\dot{V}^p$, $\|(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})\|_{\dot{V}^p}\le\delta$ задачи

$$u_x(x,y,z)\in a_1(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z))-\widetilde{u}_x(x,y,z),$$

$$\upsilon_y(x,y,z)\in a_2(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z))-\widetilde{\upsilon}_y(x,y,z),$$

$$w_z(x,y,z)\in a_3(x,y,z,u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z))-\widetilde{w}_z(x,y,z),$$

$$u(0,y,z)=u^0(0,y,z)\ ,\ \upsilon(x,0,z)=\upsilon^0(x,0,z),\ w(x,y,0)=w^0(x,y,0)\ \text{при}\ x,y,z\in[0,1]$$

такое, что $\left\|(u,\upsilon,w)_{(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})}-(u^0,\upsilon^0,w^0)\right\|_{V^p}\le\frac{\alpha}{2}$. Поэтому получим следующую оценку:

$$h(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})=\inf\{\Phi_p(u,\upsilon,w,\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w}):(u,\upsilon,w)\in V^p\}\le \Phi_p((u,\upsilon,w)_{(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})},(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w}))=$$

$$=E_p((u,\upsilon,w)_{(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})}-(u^0,\upsilon^0,w^0),(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w}))\le M$$

при $(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})\in \dot{V}^p$, $\|(\widetilde{u},\widetilde{\upsilon},\widetilde{w})\|_{V^p}\le \min\{\frac{\alpha}{2},\delta\}$. Согласно предложению 1.2.5[8], отсюда следует, что h непрерывен в нуле. Тогда по предложению 1.5.2[8] h субдифференцируема в нуле т.е. задача (3) стабильна. Теорема доказана.

Если $u\in \dot{V}_x^p$, то имеем, что $u(x,y,z)=\int_0^x u_x(\eta,y,z)d\eta$. Тогда получим, что

$$\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\int_0^x u_x(\eta,y,z)d\eta\right|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=2\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому в пространстве $\dot{V}_x^p$ нормы

$$\|u\|_1=\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\|u\|_2=\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |u_x(x,y,z)|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}$$

эквивалентны. Аналогичные утверждение справедливы и в пространствах $\dot{V}_y^p$ и $\dot{V}_z^p$. Тогда получим, что

$$\|(u,\upsilon,w)\| = \left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|u_x(x,y,z)\right|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\upsilon_y(x,y,z)\right|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left\{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|w_z(x,y,z)\right|^p dxdydz\right\}^{\frac{1}{p}}$$

является нормой в пространстве $\dot{V}^p$.

Поэтому $(\dot{V}^p)^* = L_q^{k_1}([0,1]^3)\times L_q^{k_2}([0,1]^3)\times L_q^{k_3}([0,1]^3)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, т.е. любой линейный непрерывный функционал $V^*(u,\upsilon,w)$ на $\dot{V}^p = \dot{V}_x^p \times \dot{V}_y^p \times \dot{V}_z^p$ можно представить в виде

$$V^*(u,\upsilon,w) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (\nabla U(x,y,z)\,|\,(u^*(x,y,z),\ \upsilon^*(x,y,z), w^*(x,y,z)))dxdydz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (u_x(x,y,z)\,|\,u^*(x,y,z))dxdydz + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (\upsilon_y(x,y,z)\,|\,\upsilon^*(x,y,z))dxdydz +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (w_z(x,y,z)\,|\,w^*(x,y,z))dxdydz,$$

где $u^*\in L_q^{k_1}([0,1]^3)$, $\upsilon^*\in L_q^{k_2}([0,1]^3)$, $w^*\in L_q^{k_3}([0,1]^3)$, $pq=p+q$. Функционал V^* в дальнейшем обозначается символом (u^*,υ^*,w^*).

Положим

$$\bar{f}^0(x,y,z,\omega,\nu) = \inf\{(\omega_1\,|\,\nu) + \bar{f}(x,y,z,\omega,\omega_1) : \omega_1\in R^{k_1+k_2+k_3}\}, \quad \nu\in R^{k_1+k_2+k_3}.$$

Теорема 3. Пусть $\bar{f}:[0,1]^3\times R^{2(k_1+k_2+k_3)}\to\overline{R}$, $\overline{\varphi_1}:[0,1]^2\times R^{2k_1}\to\overline{R}$, $\overline{\varphi_2}:[0,1]^2\times R^{2k_2}\to\overline{R}$, $\overline{\varphi_3}:[0,1]^2\times R^{2k_3}\to\overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты. Для того, чтобы функция $(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})\in\ \in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p$ среди всех решений задачи (1) минимизировала функционал (2) достаточно, чтобы нашлись функции, $(\bar{u}^*,\bar{\upsilon}^*,\bar{w}^*)\in L_q^{k_1+k_2+k_3}([0,1]^3)$, где $\bar{u}_x^*\in L_q^{k_1}$, $\bar{\upsilon}_y^*\in L_q^{k_2}$, $\bar{w}_z^*\in L_q^{k_3}$ такие, что

1) $(-\bar{u}_x^*(x,y,z),-\bar{\upsilon}_y^*(x,y,z),-\bar{w}_z^*(x,y,z))\in$

$$\in\partial\bar{f}^0(x,y,z,\bar{u}(x,y,z),\bar{\upsilon}(x,y,z),\bar{w}(x,y,z),\bar{u}^*(x,y,z),\bar{\upsilon}^*(x,y,z),\bar{w}^*(x,y,z)),$$

2) $\bar{f}^0(x,y,z,\bar{u}(x,y,z),\bar{\upsilon}(x,y,z),\bar{w}(x,y,z),\bar{u}^*(x,y,z),\bar{\upsilon}^*(x,y,z),\bar{w}^*(x,y,z)) =$

$$= (\bar{u}_x(x,y,z)\,|\,\bar{u}^*(x,y,z)) + (\bar{\upsilon}_y(x,y,z)\,|\,\bar{\upsilon}^*(x,y,z)) + (\bar{w}_z(x,y,z)\,|\,\bar{w}^*(x,y,z)) +$$

$$+\bar{f}(x,y,z,\bar{u}(x,y,z),\bar{\upsilon}(x,y,z),\bar{w}(x,y,z),\bar{u}_x(x,y,z),\bar{\upsilon}_y(x,y,z),\bar{w}_z(x,y,z)),$$

3) $(-\overline{u}^*(0,y,z),\overline{u}^*(1,y,z))\in\partial\overline{\varphi}_1(y,z,\overline{u}(0,y,z),\overline{u}(1,y,z)),$

4) $(-\overline{\upsilon}^*(x,0,z),\overline{\upsilon}^*(x,1,z))\in\partial\overline{\varphi}_2(x,z,\overline{\upsilon}(x,0,z),\overline{\upsilon}(x,1,z)),$

5) $(-\overline{w}^*(x,y,0),\overline{w}^*(x,y,1))\in\partial\overline{\varphi}_3(x,y,\overline{w}(x,y,0),\overline{w}(x,y,1)),$

а если при $(u^0,\upsilon^0,w^0)=(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$ выполняется условие теоремы 2, существуют функции $\beta_1(\cdot)\in L_1([0,1]^2),\ \beta_2(\cdot)\in L_1([0,1]^2),\ \beta_3(\cdot)\in L_1([0,1]^2)$ и число $c\ge 0$ такие, что

$-\beta_1(y,z)-c|\nu|^p\le\varphi_1(y,z,\nu)$, $-\beta_2(x,z)-c|\omega|^p\le\varphi_2(x,z,\omega)$,

$-\beta_3(x,y)-c|w|^p\le\varphi_3(x,y,w)$ при $(\nu,\omega,w)\in R^{2k_1}\times R^{2k_2}\times R^{2k_3}$, то соотношения 1)-5) являются также необходимыми.

Доказательство.

Достаточность соотношения 1)-5) непосредственно проверяется.

Необходимость.

Из теоремы 2 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [8] вытекает, что решения $(\overline{u}(\cdot),\overline{\upsilon}(\cdot),\overline{w}(\cdot))$, задачи $\inf\{I_p(u,\upsilon,w):(u,\upsilon,w)\in V^p\}$ и решения $V^*=(u^*(\cdot),\upsilon^*(\cdot),w^*(\cdot))$ задачи $\sup\{-\Phi_p^*(0,-\widetilde{V}^*):\widetilde{V}^*\in(\dot{V}^p)^*\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi_p((\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}),0)+\Phi_p^*(0,-V^*)=0\,. \tag{5}$$

По определению

$$\Phi_p^*(0,-V^*)=\sup_{\substack{(u,v,w)\in V_x^p\times V_y^p\times V_z^p,\\ (\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{w})\in\dot{V}_x^p\times\dot{V}_y^p\times\dot{V}_z^p}}\Big\{-\int_0^1\int_0^1\int_0^1(\widetilde{u}_x(x,y,z)\,|\,u^*(x,y,z))dxdydz-$$

$$-\int_0^1\int_0^1\int_0^1(\widetilde{\upsilon}_y(x,y,z)\,|\,\upsilon^*(x,y,z))dxdydz-$$

$$-\int_0^1\int_0^1\int_0^1(\widetilde{w}_z(x,y,z)\,|\,w^*(x,y,z))dxdydz-$$

$$-\int_0^1\int_0^1\int_0^1\bar{f}(x,y,z,U(x,y,z),\nabla U(x,y,z)+\nabla\widetilde{U}(x,y,z))dxdydz-$$

$$-\int_0^1\int_0^1\overline{\varphi}_1(y,z,u(0,y,z),u(1,y,z))dydz-\int_0^1\int_0^1\overline{\varphi}_2(x,z,\upsilon(x,0,z),\upsilon(x,1,z))dxdz-$$

$$
\left. - \int_0^1 \int_0^1 \overline{\varphi_3}(x, y, w(x, y, 0), w(x, y, 1))dxdy \right\} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{(u,v,w) \in V_x^p \times V_y^p \times V_z^p} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (u_x(x, y, z) \mid u^*(x, y, z))dxdydz + \right. \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\upsilon_y(x, y, z) \mid \upsilon^*(x, y, z))dxdydz + \\
&- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (w_z(x, y, z) \mid w^*(x, y, z))dxdydz - \\
&- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}^0(x, y, z, U(x, y, z), U^*(x, y, z))dxdydz - \\
&- \int_0^1 \int_0^1 \overline{\varphi_1}(y, z, u(0, y, z), u(1, y, z))dydz - \\
&\left. - \int_0^1 \int_0^1 \overline{\varphi_2}(x, z, \upsilon(x, 0, z), \upsilon(x, 1, z))dxdz - \int_0^1 \int_0^1 \overline{\varphi_3}(x, y, w(x, y, 0), w(x, y, 1))dxdy \right\}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Обозначив

$$
\begin{aligned}
S_p(u, \upsilon, w) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}^0(x, y, z, U(x, y, z), U^*(x, y, z))dxdydz + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \overline{\varphi_1}(y, z, u(0, y, z), u(1, y, z))dydz + \\
&\left. + \int_0^1 \int_0^1 \overline{\varphi_2}(x, z, \upsilon(x, 0, z), \upsilon(x, 1, z))dxdz + \int_0^1 \int_0^1 \overline{\varphi_3}(x, y, w(x, y, 0), w(x, y, 1))dxdy \right\},
\end{aligned}
$$

по соотношению (6) имеем, что $\Phi_p^*(0, -V^*) = S_p^*(V^*)$. Из соотношения (5) вытекает, что $I_p(\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w}) + S_p^*(V^*) = 0$. Поэтому используя неравенства Фенхеля имеем, что

$$
\begin{aligned}
S_p^*(V^*) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\bar{u}_x(x, y, z) \mid u^*(x, y, z))dxdydz + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\bar{\upsilon}_y(x, y, z) \mid \upsilon^*(x, y, z))dxdydz + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\bar{w}_z(x, y, z) \mid w^*(x, y, z))dxdydz - S_p(\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w}),
\end{aligned}
$$

$$S_p(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(\overline{u}_x(x,y,z)\,|\,u^*(x,y,z))dxdydz+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1(\overline{\upsilon}_y(x,y,z)\,|\,\upsilon^*(x,y,z))dxdydz+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1(\overline{w}_z(x,y,z)\,|\,w^*(x,y,z))dxdydz+I_p(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}).$$

Из первого равенства следует, что $V^*\in\partial S_p(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$. Из второго равенства имеем, что

$$\bar{f}^0(x,y,z,\overline{U}(x,y,z),u^*(x,y,z),\upsilon^*(x,y,z),w^*(x,y,z))=$$
$$=(\overline{u}_x(x,y,z)\,|\,u^*(x,y,z))+(\overline{\upsilon}_y(x,y,z)\,|\,\upsilon^*(x,y,z))+$$
$$+(\overline{w}_z(x,y,z)\,|\,w^*(x,y,z))+\bar{f}(x,y,z,\overline{U}(x,y,z),\overline{u}_x(x,y,z),\overline{\upsilon}_y(x,y,z),\overline{w}_z(x,y,z)).$$

Используя факт из ([11], стр.63) имеем, что для любого, $u^*\in L_q^{k_1}([0,1]^3)$ $\upsilon^*\in L_q^{k_2}([0,1]^3)$, $w^*\in L_q^{k_3}([0,1]^3)$, где $pq=p+q$, $p>1$, верны соотношения

$$\bar{f}^0(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3,u^*(x,y,z),\upsilon^*(x,y,z),w^*(x,y,z))=$$
$$=\inf\{(\widetilde{\nu}_1\,|\,u^*(x,y,z))+(\widetilde{\nu}_2\,|\,\upsilon^*(x,y,z))+$$
$$+(\widetilde{\nu}_3\,|\,w^*(x,y,z))+\bar{f}(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2,\widetilde{\nu}_3):(\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2,\widetilde{\nu}_3)\in R^{k_1+k_2+k_3}\}=$$
$$=\inf\{(\widetilde{\nu}_1\,|\,u^*(x,y,z))+(\widetilde{\nu}_2\,|\,\upsilon^*(x,y,z))+(\widetilde{\nu}_3\,|\,w^*(x,y,z))+$$
$$+f(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2,\widetilde{\nu}_3):\widetilde{\nu}_1\in a_1(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3),$$
$$\widetilde{\nu}_2\in a_2(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3),\widetilde{\nu}_3\in a_3(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3)\}\le$$
$$\le\sup\{|\widetilde{\nu}_1||u^*(x,y,z)|+|\widetilde{\nu}_2||\upsilon^*(x,y,z)|+$$
$$+|\widetilde{\nu}_3||w^*(x,y,z)|+d(x,y,z)+\alpha|(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2,\widetilde{\nu}_3)|^p:$$
$$|\widetilde{\nu}_i|\le k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)\}\le$$
$$\le\sup\{k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)|u^*(x,y,z)|+k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)|\upsilon^*(x,y,z)|+$$
$$+k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)|w^*(x,y,z)|+$$
$$+d(x,y,z)+\alpha(|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|+|(\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2,\widetilde{\nu}_3)|)^p:|\widetilde{\nu}_i|\le k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)\}\le$$
$$\le k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)(|u^*(x,y,z)|+$$
$$+|\upsilon^*(x,y,z)|+|w^*(x,y,z)|)+d(x,y,z)+\alpha(|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|+$$
$$+3k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|))^p\le d(x,y,z)+$$

$$+\alpha((3k+1)(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|))^p+$$

$$+k\left\{\frac{(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)^p}{p}+\frac{(|u^*(x,y,z)|+|\upsilon^*(x,y,z)|+|w^*(x,y,z)|)^q}{q}\right\}=$$

$$=\frac{k(|u^*(x,y,z)|+|\upsilon^*(x,y,z)|+|w^*(x,y,z)|)^q}{q}+$$

$$+d(x,y,z)+((3k+1)^p\alpha+\frac{k}{p})(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)^p,$$

а для $p=1$ верно неравенство

$$\bar{f}^0(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3,u^*(x,y,z),\upsilon^*(x,y,z),w^*(x,y,z))\leq$$

$$\leq k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)(|u^*(x,y,z)|+|\upsilon^*(x,y,z)|+$$

$$+|w^*(x,y,z)|)+d(x,y,z)+\alpha(|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|+3k(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|))\leq$$

$$\leq d(x,y,z)+(k\operatorname*{ess\,sup}_{(x,y,z)\in[0,1]^3}(|u^*(x,y,z)|+$$

$$+|\upsilon^*(x,y,z)|+|w^*(x,y,z)|)+(3k+1)\alpha)(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)$$

при $(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\in R^{(k_1+k_2+k_3)}$ и $S_p(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$ конечен, то легко проверяется, что для функционала $S_p(u,\upsilon,w)$ условия леммы 1.2 выполняется. Отметим, что аналогично проверяется, что при $p>1$ верно неравенство

$$\bar{f}^0(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3,u^*(x,y,z),\upsilon^*(x,y,z),w^*(x,y,z))\geq$$

$$\geq-\frac{k(|u^*(x,y,z)|+|\upsilon^*(x,y,z)|+|w^*(x,y,z)|)^q}{q}-$$

$$-d(x,y,z)-((3k+1)^p\alpha+\frac{k}{p})(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|)^p,$$

а при $p=1$ верно неравенство

$$\bar{f}^0(x,y,z,\nu_1,\nu_2,\nu_3,u^*(x,y,z),\upsilon^*(x,y,z),w^*(x,y,z))\geq$$

$$\geq-d(x,y,z)-(k\operatorname*{ess\,sup}_{(x,y,z)\in[0,1]^3}(|u^*(x,y,z)|+$$

$$+|\upsilon^*(x,y,z)|+|w^*(x,y,z)|)+(3k+1)\alpha)(1+|(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|).$$

По следствию 1.1 $V^*=(\bar{u}^*,\bar{\upsilon}^*,\bar{w}^*)=(0,0,0,\bar{u}^*,\bar{\upsilon}^*,\bar{w}^*)\in\partial S_p(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$ тогда и только тогда, когда $\bar{u}^*_x\in L_q^{k_1}$, $\bar{\upsilon}^*_y\in L_q^{k_2}$, $\bar{w}^*_z\in L_q^{k_3}$ и такие, что

1) $(-\bar{u}^*_x(x,y,z),-\bar{\upsilon}^*_y(x,y,z),-\bar{w}^*_z(x,y,z))\in$

$$\in \partial \bar{f}^0(x,y,z,\bar{u}(x,y,z),\bar{\upsilon}(x,y,z),\bar{w}(x,y,z),\bar{u}^*(x,y,z),\bar{\upsilon}^*(x,y,z),\bar{w}^*(x,y,z)),$$

2) $(-\bar{u}^*(0,y,z),\bar{u}^*(1,y,z))) \in \partial\bar{\varphi}_1(y,z,\bar{u}(0,y,z),\bar{u}(1,y,z)),$

3) $(-\bar{\upsilon}^*(x,0,z),\bar{\upsilon}^*(x,1,z))) \in \partial\bar{\varphi}_2(x,z,\bar{\upsilon}(x,0,z),\bar{\upsilon}(x,1,z)),$

4) $(-\bar{w}^*(x,y,0),\bar{w}^*(x,y,1))) \in \partial\bar{\varphi}_3(x,y,\bar{w}(x,y,0),\bar{w}(x,y,1)).$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\bar{f}:[0,1]^3 \times R^{2(k_1+k_2+k_3)} \to \bar{R}$ и $\bar{\varphi}_i:[0,1]^2 \times R^{2k_i} \to \bar{R}$, $i=1,2,3,$ выпуклые нормальные интегранты. Для того, чтобы функция $(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w}) \in V_x^p \times V_y^p \times V_z^p$ среди всех решений задачи (1) минимизировала функционал (2) достаточно, чтобы нашлись функции, $(\bar{u}^*,\bar{\upsilon}^*,\bar{w}^*) \in L_q^{k_1+k_2+k_3}([0,1]^3)$, где $\bar{u}_x^* \in L_q^{k_1}$, $\bar{\upsilon}_y^* \in L_q^{k_2}$, $\bar{w}_z^* \in L_q^{k_3}$ такие, что

1) $(-\bar{u}_x^*(x,y,z),-\bar{\upsilon}_y^*(x,y,z),-\bar{w}_z^*(x,y,z),$

$-\bar{u}^*(x,y,z),-\bar{\upsilon}^*(x,y,z),-\bar{w}^*(x,y,z)) \in$

$\in \partial f(x,y,z,\bar{u}(x,y,z),\bar{\upsilon}(x,y,z),\bar{w}(x,y,z),$

$\bar{u}_x(x,y,z),\bar{\upsilon}_y(x,y,z),\bar{w}_z(x,y,z)),$

2) $(-\bar{u}^*(0,y,z),\bar{u}^*(1,y,z))) \in \partial\bar{\varphi}_1(y,z,\bar{u}(0,y,z),\bar{u}(1,y,z)),$

3) $(-\bar{\upsilon}^*(x,0,z),\bar{\upsilon}^*(x,1,z))) \in \partial\bar{\varphi}_2(x,z,\bar{\upsilon}(x,0,z),\bar{\upsilon}(x,1,z)),$

4) $(-\bar{w}^*(x,y,0),\bar{w}^*(x,y,1))) \in \partial\bar{\varphi}_3(x,y,\bar{w}(x,y,0),\bar{w}(x,y,1)),$

а если при $(u^0,\upsilon^0,w^0)=(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$ выполняется условие теоремы 2, существуют функции $\beta_1(\cdot) \in L_1([0,1]^2)$, $\beta_2(\cdot) \in L_1([0,1]^2)$, $\beta_3(\cdot) \in L_1([0,1]^2)$ и число $c \ge 0$ такие, что

$-\beta_1(y,z)-c|\nu|^p \le \varphi_1(y,z,\nu)$, $-\beta_2(x,z)-c|\omega|^p \le \varphi_2(x,z,\omega)$,

$-\beta_3(x,y)-c|w|^p \le \varphi_3(x,y,w)$ при $(\nu,\omega,w) \in R^{2k_1} \times R^{2k_2} \times R^{2k_3}$,

то соотношения 1)-4) являются также необходимыми.

Литература

1. Садыгов М.А. О минимизации интегральных функционалов в пространствах Соболева, Препринт №165, Баку, 1986, 48 с.
2. Садыгов М.А. Необходимые условия экстремума для дифференциальных включений, Баку 1991, Препринт №426, 42 с.
3. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку, 1996, 148 с.
4. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу, Баку, 1999, 135 с.

5. Садыгов М.А. Об экстремальной задаче для трехмерных дифференциальных включений и двумерных дискретных включений, Препринт, Баку, 2008, 54 с.
6. Садыгов М.А. О харатеризации решений дискретных и дифференциальных включений, Баку-2007, 59 с.
7. Садыгов М.А. Об экстремальной задачи для трехмерных дифференциальных включений и задача оптимального управления, Препринт №3, Баку, 2011, 47с.
8. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы, М.: Мир,1979.
9. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ, М.: Мир, 1988, 510 с.
10. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи, М.: Наука, 1980, 319 с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1989, 623 с.

Üç ölçülü diferensial daxilolmalar üçün qabarıq ekstremum məsələsi

M.A. Sadıqov

XÜLASƏ

Məqalədə üç ölçülü daxilolmalar üçün minimum ekstremum məsələlərinə baxılır. Çox ölçülü diferensial daxilolmalar üçün ekstremum məsələləri müəllif tərəfindən baxılmış və birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır [1-5]. [5] və [7] işlərində analoji məsələlər üçölçülü halda öyrənilib. İşdə baxılan məsələlərin gətirildiyi variasion məsələlər öyrənilir. Sonra isə baxılan məsələlər üçün birinci tərtib zəruri və kafi şərtlər alınır.

Açar sözlər: ekstremal məsələlər**,** diferensial daxilolmalar, zəruri və kafi şərtlər.

Convex extremal problems for the three dimensional differential inclusions

M.A. Sadygov

ABSTRACT

In the paper the minimum extremal problems are considered for the three dimensional differential inclusions. Extremal problems for the multi dimensional differential inclusions have been studied by author and necessary conditions of the first and second order obtained in [1, 5]. In [5] and [7] the similar problems for the three dimensional case are considered. Here the variational problems are investigated to which the considered problems are reduced. Then the convex extremal problems for the considered ones are studied and the first order necessary and sufficient optimality conditions are obtained.

Keywords: extremal problems, differential inclusions, necessary and sufficient conditions.